

Ejercicios Resueltos De Programacion Lineal Por El Metodo Grafico

ejercicios resueltos de programacion lineal por el metodo grafico La programación lineal es una herramienta fundamental en la toma de decisiones en diversas áreas como la economía, la ingeniería, la logística y la administración. Su objetivo principal es optimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. Uno de los métodos más intuitivos y visuales para resolver problemas de programación lineal es el método gráfico, especialmente útil cuando hay dos variables de decisión. En este artículo, abordaremos en detalle los ejercicios resueltos de programación lineal por el método gráfico, proporcionando explicaciones claras, pasos detallados y ejemplos prácticos para facilitar su comprensión.

¿Qué es la programación lineal?

La programación lineal (PL) consiste en maximizar o minimizar una función lineal conocida como función objetivo, sujeta a ciertas restricciones lineales. La formulación general de un problema de programación lineal es: - Función objetivo: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ - Restricciones: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \text{o} \quad \geq 0$ - Condiciones de no negatividad: $x_j \geq 0 \quad \text{para todos } j$ El método gráfico permite visualizar la solución en un espacio bidimensional y determinar la región factible y el óptimo de manera intuitiva y sencilla.

¿Cuándo usar el método gráfico?

El método gráfico es especialmente útil en problemas con: - Dos variables de decisión (x_1 y x_2): La visualización en un plano cartesiano es sencilla y clara. - Problemas sencillos en los que se puedan representar todas las restricciones y la función objetivo en un gráfico. - Fases iniciales de análisis para entender las propiedades del problema antes de aplicar métodos más complejos como el simplex. Para problemas con más de dos variables, el método gráfico no es práctico, y se recomienda usar métodos algebraicos o computacionales.

Pasos para resolver un ejercicio de programación lineal por el método gráfico

A continuación, se presentan los pasos generales para resolver un problema de programación lineal mediante el método gráfico:

1. Formular el problema

- Identificar la función objetivo (maximizar o minimizar). - Listar todas las restricciones lineales. - Especificar las condiciones de no negatividad.

2. Dibujar las restricciones en el plano cartesiano

- Convertir cada restricción en una ecuación. - Dibujar las líneas correspondientes en el gráfico. - Determinar la

región factible, que es el área común donde todas las restricciones se cumplen simultáneamente.

3. Identificar la región factible

- La región factible es el conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones. - La región puede ser un polígono convexo, incluyendo su interior.

4. Encontrar los vértices de la región factible

- Los puntos extremos o vértices son donde las restricciones se intersectan. - Estos vértices son posibles candidatos para la solución óptima.

5. Evaluar la función objetivo en cada vértice

- Sustituir las coordenadas de cada vértice en la función objetivo. - Determinar cuál vértice proporciona el valor máximo (en problemas de maximización) o mínimo (en problemas de minimización).

6. Seleccionar la solución óptima

- La solución óptima será el vértice que maximice o minimice la función objetivo, según el problema.

Ejemplo práctico resuelto paso a paso

Vamos a resolver un ejercicio típico de programación lineal por el método gráfico para ilustrar cada uno de los pasos descritos.

Problema planteado

> Una empresa produce dos productos: A y B. La ganancia por unidad de producto A es de 3 unidades monetarias y por B es de 2 unidades monetarias. La producción de estos productos está limitada por las siguientes restricciones: 1. La producción de A más B no puede superar las 40 unidades: $x_1 + x_2 \leq 40$ 2. La producción de A debe ser al menos 10 unidades: $x_1 \geq 10$ 3. La producción de B debe ser al menos 5 unidades: $x_2 \geq 5$ 4. La producción total no puede exceder las 50 unidades en conjunto: $x_1 + x_2 \leq 50$ 5. No se pueden producir cantidades negativas: $x_1, x_2 \geq 0$ El objetivo es maximizar la ganancia total: $Z = 3x_1 + 2x_2$

Formulación del problema

- Función objetivo: $Z = 3x_1 + 2x_2$ - Restricciones:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dibujo de las restricciones

- La línea $x_1 + x_2 = 40$ pasa por los puntos (40, 0) y (0, 40). - La línea $x_1 + x_2 = 50$ pasa por los puntos (50, 0) y (0, 50). - La restricción $x_1 \geq 10$ implica una línea vertical en $x_1=10$. - La restricción $x_2 \geq 5$ implica una línea horizontal en $x_2=5$. El área factible será la intersección de las regiones que cumplen todas estas restricciones.

Determinación de la región factible

- La región está limitada por las líneas: - $x_1 = 10$ (derecha) - $x_2 = 5$ (arriba) - $x_1 + x_2 \leq 40$ (por debajo de la línea) - $x_1 + x_2 \leq 50$ (por debajo de la línea superior, que en realidad no limita más allá de la primera restricción en esta región) - La intersección de estas restricciones generará un polígono delimitado por los vértices: - Punto A: (10, 5) - Punto B: Intersección de $x_1 = 10$ y $x_1 + x_2 = 40 \Rightarrow x_2 = 30$ Entonces, (10,30). - Punto C: Intersección de $x_2 = 5$ y $x_1 + x_2 = 40 \Rightarrow x_1 = 35$ Entonces, (35,5). - Punto D: Intersección de $x_1 + x_2 = 40$ y $x_1 + x_2 = 50$ no existe, ya que son líneas paralelas. La restricción relevante será la primera. El vértice (50,0) no pertenece a la región, ya que $x_2 \geq 5$. La región máxima está definida por los puntos (10,5), (10,30), (35,5).

Evaluación en los vértices

Calculamos $Z = 3x_1 + 2x_2$: | Vértice | x_1 | x_2 | $Z = 3x_1 + 2x_2$ | |||| A | 10 | 5 | $3(10) + 2(5) = 30 + 10 = 40$ | | B | 10 | 30 | $3(10) + 2(30) = 30 + 60 = 90$ | | C | 35 | 5 | $3(35) + 2(5) = 105 + 10 = 115$ |
La solución óptima es en el vértice C: $(x_1 = 35, x_2 = 5)$, con una ganancia de 115 unidades monetarias.

Interpretación de resultados y conclusiones

El método gráfico es una herramienta efectiva para resolver problemas de programación lineal con dos variables, permitiendo visualizar la región factible.

Ejercicios resueltos de programación lineal por el método gráfico: una guía completa para entender y aplicar la técnica. La programación lineal es una disciplina fundamental en matemáticas aplicadas y optimización que permite resolver problemas donde se desea maximizar o minimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Una de las metodologías más visuales y didácticas para abordar estos problemas es el método gráfico. En este artículo, exploraremos en profundidad los ejercicios resueltos de programación lineal por el método gráfico, proporcionando una guía paso a paso para entender y aplicar esta técnica eficazmente.

¿Qué es la programación lineal y por qué utilizar el método gráfico?

Definición de programación lineal

La programación lineal es un método matemático para optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, conocida como función objetivo, bajo un conjunto de restricciones también lineales. Formalmente, se presenta en la forma: $\text{Maximizar o minimizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ sujeto a: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m$ y $x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n$

¿Por qué utilizar el método gráfico?

El método gráfico se emplea principalmente en problemas con dos variables de decisión, ya que permite representar visualmente las restricciones y encontrar la solución óptima en una gráfica. Sus ventajas incluyen: - Facilita la comprensión del problema y su solución. - Permite verificar visualmente la factibilidad y la región

factible. - Es útil como herramienta educativa para introducir conceptos de programación lineal. - Facilita la identificación rápida de la solución óptima en problemas sencillos. No obstante, tiene limitaciones en problemas con más de dos variables, donde se requiere el uso de métodos algebraicos o computacionales más avanzados.

Pasos para resolver ejercicios de programación lineal por el método gráfico

La resolución de ejercicios por método gráfico sigue una serie de pasos sistemáticos que garantizan una solución correcta y clara. A continuación, se describen estos pasos en detalle:

1. Formular la función objetivo y las restricciones

- Definir claramente las variables de decisión. - Escribir la función objetivo en términos de esas variables. - Plantear todas las restricciones lineales, asegurándose de que estén en forma estándar (igualdad o desigualdad).

2. Convertir las restricciones en ecuaciones y graficarlas

- Para cada restricción, convertir la desigualdad en igualdad para graficar la frontera. - Graficar cada frontera en un plano XY, identificando la línea correspondiente.

3. Determinar la región factible

- Analizar cada restricción para determinar qué lado de la línea corresponde a la condición (por ejemplo, para $\leq$, la región debajo o a la izquierda; para $\geq$, la región arriba o a la derecha). - Usar pruebas de puntos (por ejemplo, el origen) para identificar la región factible común a todas las restricciones. - La región factible será el polígono o el área común donde todas las restricciones se cumplen simultáneamente.

4. Identificar los vértices de la región factible

- Los vértices (puntos de esquina) del polígono de la región factible son potenciales candidatos para la solución óptima. - Encontrar las coordenadas exactas de estos vértices resolviendo sistemas de ecuaciones formados por las líneas de las restricciones que se intersectan.

5. Evaluar la función objetivo en los vértices

- Sustituir las coordenadas de cada vértice en la función objetivo. - Determinar cuál de estos valores es máximo o mínimo, según el objetivo del problema.

6. Concluir la solución óptima

- La solución óptima será el vértice que proporciona la mejor valoración de la función objetivo. - Verificar que esta solución cumple todas las restricciones.

Ejemplo práctico resuelto paso a paso

Vamos a ilustrar todo el proceso con un ejemplo típico, que abarca la formulación, graficación, identificación de la región factible y evaluación.

Problema:

Maximizar $(Z = 3x + 2y)$ Sujeto a: $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución paso a paso:

Paso 1: Formular y graficar las restricciones

- Primera restricción: $(x + y \leq 4)$ - Ecuación frontera: $(x + y = 4)$ - Cuando $(x=0)$, $(y=4)$; cuando $(y=0)$, $(x=4)$ - Gráfica: línea que une los puntos $(0,4)$ y $(4,0)$ - Segunda restricción: $(x - y \geq 1)$ - Ecuación frontera: $(x - y = 1)$ - Cuando $(x=0)$, $(y=-1)$ (fuera del primer cuadrante), pero en restricciones $(y \geq 0)$, así que probamos puntos en el primer cuadrante: - Cuando $(x=2)$, $(y=1)$, la línea pasa por $(2,1)$ - La desigualdad $(x - y \geq 1)$ indica que la región está por encima de la línea $(x - y = 1)$ - Restricciones de no negatividad: $(x \geq 0)$, $(y \geq 0)$

Paso 2: Dibujar las líneas y determinar la región factible

- La línea $(x + y = 4)$: pasa por $(0,4)$ y $(4,0)$ - La línea $(x - y = 1)$: pasa por $(1,0)$ y $(2,1)$, pero en general, la región de interés está por encima de esta línea. Para determinar la región factible: - La región está debajo de $(x + y = 4)$ - Está por encima de $(x - y = 1)$ - Y en el primer cuadrante.

Paso 3: Encontrar los vértices de la región factible

- Intersección de $(x + y = 4)$ y $(x - y = 1)$: - Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ - Sumando ambas ecuaciones: $2x = 5 \Rightarrow x = 2.5$ - Sustituyendo en $(x + y = 4)$: $2.5 + y = 4 \Rightarrow y = 1.5$ - Vértice: $(2.5, 1.5)$ - Vértice en $(0,0)$, que corresponde a la intersección de las restricciones con los ejes. - Otros vértices posibles: - Intersección de $(x + y = 4)$ con $(y = 0)$: $(x = 4, y = 0)$ - Intersección de $(x - y = 1)$ con $(y = 0)$: $(x = 1, y = 0)$

Paso 4: Evaluar la función objetivo en los vértices

- En $(0,0)$: $(Z = 3(0) + 2(0) = 0)$ - En $(4,0)$: $(Z = 3(4) + 2(0) = 12)$ - En $(1,0)$: $(Z = 3(1) + 2(0) = 3)$ - En $(2.5, 1.5)$: $(Z = 3(2.5) + 2(1.5) = 7.5 + 3 = 10.5)$

Paso 5: Determinar la solución óptima

- El valor máximo de (Z) en los vértices es en $(4,0)$: $(Z = 12)$

Conclusión:

- La solución óptima es $(x = 4)$, $(y = 0)$, con un valor máximo de $(Z = 12)$.

Consejos y notas importantes para resolver ejercicios por método gráfico

- Siempre verificar que la región que se obtiene realmente cumple todas las restricciones. - La solución óptima en problemas lineales en dos variables se encuentra en uno de los vértices de la región factible. - En problemas con

Questions & Answers About ejercicios resueltos de programacion lineal por el metodo grafico

No	Question	Answer
1	¿Qué es la programación lineal y en qué consiste el método gráfico?	La programación lineal es una técnica matemática que busca optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo sujeta a restricciones lineales. El método gráfico consiste en representar gráficamente las restricciones en un plano y encontrar la región factible para determinar la solución óptima visualmente.
2	¿Cuáles son los pasos principales para resolver ejercicios de programación lineal por el método gráfico?	Los pasos principales son: 1) Plantear la función objetivo y las restricciones, 2) Graficar las restricciones en el plano, 3) Determinar la región factible, 4) Identificar los vértices de la región, 5) Evaluar la función objetivo en esos vértices y 6) Seleccionar la solución que maximiza o minimiza la función según el objetivo.
3	¿Qué tipo de problemas de programación lineal son adecuados para resolver mediante el método gráfico?	El método gráfico es adecuado para problemas con dos variables de decisión, ya que permite representarlos en un plano bidimensional y visualizar la región factible y las soluciones óptimas fácilmente.
4	¿Cómo se identifican los vértices de la región factible en un ejercicio resuelto?	Los vértices se encuentran en las intersecciones de las restricciones lineales. Se pueden calcular resolviendo las ecuaciones de las restricciones en pares o utilizando métodos algebraicos para determinar sus puntos de intersección.
5	¿Qué importancia tiene evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible?	En programación lineal, según el teorema fundamental, la solución óptima se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Por ello, evaluar la función objetivo en estos puntos permite determinar cuál proporciona la mejor solución.
6	¿Qué errores comunes se deben evitar al resolver ejercicios de programación lineal por el método gráfico?	Algunos errores comunes incluyen no graficar correctamente las restricciones, no identificar correctamente la región factible, olvidar verificar las restricciones en los vértices, o no evaluar correctamente la función objetivo en los puntos críticos.
7	¿Cómo se puede interpretar gráficamente la solución óptima en un ejercicio resuelto de programación lineal?	La solución óptima corresponde al vértice de la región factible donde la función objetivo alcanza su valor máximo o mínimo, dependiendo del problema. Este punto se puede marcar en el gráfico y se puede leer directamente sus coordenadas.
8	¿Qué herramientas o software se pueden utilizar para resolver ejercicios de programación lineal por el método gráfico?	Se pueden usar herramientas como GeoGebra, Desmos, Excel, o software especializado en optimización como LINDO o Solver de Excel, que permiten graficar restricciones y calcular soluciones de manera más precisa y rápida.

programacion lineal, metodo grafico, ejercicios resueltos, optimización lineal, gráficos de programación lineal, ejemplos de programación lineal, solución gráfica, técnicas de programación lineal, problemas de optimización, análisis gráfico